ANALISIS SELF SIMILARITY DENGAN WAVELET MAXIMA (KASUS CANTOR SET)

Ni G. A. P. Harry Saptarini

Program Studi Manajemen Informatika, Jurusan Teknik Elektro Politeknik Negeri Bali
Bukit Jimbaran, P.O. Box 1064 Tuban badung, Bali
Email : ayu_harry@yahoo.com

Abstrak :
Beberapa kelas multifraktal disusun dari fungsi-fungsi yang bersifat *self-similar* secara bagian. Multifraktal bisa memiliki properti renormalisasi yang berbeda pada skala yang berbeda. Kebutuhan untuk mengalisis komponen multiskala pada sinyal bisa dilakukan dengan baik oleh *wavelet*. *Wavelet* transform adalah alat alami untuk menganalisis sifat multifractal sinyal karena memisahkan komponen multiskalanya.
Pada penelitian ini memiliki tujuan untuk menunjukkan bagaimana analisis dengan wavelet mampu menunjukkan adanya self-similarity atau fraktal sinyal yang dihasilkan oleh *Cantor Set*.

Kata Kunci : *self similarity, Wavelet, cantor set*

ANALISIS SELF SIMILARITY DENGAN WAVELET MAXIMA (KASUS CANTOR SET)

Abstract :
Some multifractal classes composed from functions that are part of a self-similar manner. Renormalization Multifractal can have different properties at different scales. The need for multi scale analyzes components in the signal can be done with either by wavelet. The wavelet transform is a natural tool to analyze the multifractal properties of signals since it separates their multiscale components.
The purpose of this research is to show how the wavelet analysis is able to show the existence of self-similarity or fractal signals generated by the Cantor Set

Keywords : *self similarity, Wavelet, cantor set*

I. Pendahuluan

Beberapa kelas multifraktal disusun dari fungsi-fungsi yang bersifat self-similar secara bagian. Sebuah fraktal bisa tersusun dari beberapa transformasi *affine*. Secara umum, transformasi *affine* disusun dari transformasi linier seperti (misalnya rotasi, dilatasi) dan translasi. Menganalisis fungsi *affine self-similarties* merupakan permasalahan yang cukup sulit.

Multifraktal bisa memiliki properti renormalisasi yang berbeda pada skala yang berbeda. Kebutuhan untuk mengalisis komponen multiskala pada sinyal bisa dilakukan dengan baik oleh wavelet.

Wavelet transform adalah alat alami untuk menganalisis sifat multifractal sinyal karena memisahkan komponen multiskalanya.

Akan lebih mudah menganalisis transformasi wavelet *local maxima* daripada menganalisis nilai keseluruhan transformasi di semua lokasi

Pada penelitian ini memiliki tujuan untuk menunjukkan bagaimana analisis dengan wavelet mampu menunjukkan adanya self-similarity atau fraktal sinyal yang dihasilkan oleh Cantor Set.

II. Metode Penelitian

2.1. Self Similarity

Dalam matematika, objek yang memiliki *self-similarity* adalah objek yang benar-benar (atau kira-kira) sama dengan bagian dari dirinya sendiri. (yaitu keseluruhan objek memiliki bentuk yang sama sebagai satu kesatuan atau lebih).
Variasi skala merupakan bentuk dari *self-similarity* di mana pada setiap pembesaran akan terdapat potongan yang lebih kecil dari suatu objek yang sama dengan keseluruhan objek.
Contoh objek dengan self similarity yaitu kurva koch, pakis Barnsley, segitiga Sierpenski dan lain-lain.
Self-similarity sebagai salah satu karakteristik objek fraktal banyak ditemukan dalam kehidupan sehari-hari seperti digunakan untuk Deteksi Kanker Payudara (Sankar:2009) & (Patel:2010) dan Deteksi DDoS (Brignoli:2008).

SELF-SIMILAR MULTIFRACTAL

Sebuah kelas multifraktal memenuhi persamaan berikut ini :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}(p_i l_i f(l_i(x - r_i))) \quad (1)$$

di mana *p* merupakan kumpulan titik yang membentuk suatu objek dan *l* merupakan skala dilasi. Sementara r adalah faktor traslasi atau pergeseran. Apabila *f(x)* memiliki energi yang terbatas, maka penjumlahan seluruh nilai *p* akan menghasilkan nilai 1.

2.2 Wavelet Transform Maxima Multifractal

Wavelet transform adalah alat alami untuk menganalisis sifat multifractal sinyal karena memisahkan komponen multiskalanya Transfomasi wavelet untuk sebuah fungsi pada absis x dan skala s didefinisikan sebagai berikut :

$$Wf(s,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\frac{1}{s}\psi\left(\frac{x-u}{s}\right)du \quad (2)$$

di mana ψ merupakan *mother wavelet* yang digunakan. Dilatasi dan traslasi fungsi menghasilkan modifikasi sederhana dari transformasi wavelet pada persamaan 2. Misalkan *g(x) = plf(l(x-r)),* maka dari persamaan 2 akan diperoleh

$$Wg(s,x) = plWf(ls, l(x-r)) \quad (3)$$

Untuk mengkarakterisasi perilaku singularitas dari fungsi, bisa dilakukan dengan memproses nilai dan posisi transformasi wavelet modulus maxima. Kita mengingat bahwa wavelet modulus maxima merupakan sebuah titik (s0,x0) pada *scale-space plane*, di mana *|Wf(s0,x0)|* maksimum secara lokal untuk x merupakan tetangga dari x0. Maxima ini akan ditempatkan sepanjang kurva pada *scale-space plane* (s,x). Diberikan Mf(s,x) sebagai maxima yang didefinisikan oleh Mf(s,x)=Wf(s,x) jika (s,x) adalah modulus maxima dan Mf(s,x)=0 jika selain itu.

2.3. Algoritma Voting untuk Parameter Renormalisasi

Renormalisasi *affine* dikarakteristikkan oleh 3 parameter (p,l,r). Parameter renormaslisasi kemudian diidentifikasi sebagai titik dengan tingginya nilai vote dalam space (p,l,r). Multifraktal yang dibentuk dari 2 transformasi *affine* dengan parameter (p1,l1,r1) dan (p2,l2,r2) juga merupakan keluarga dari transformasi *affine* yang dispesfikasikan oleh ($p_1^n, l_1^n, p_2^m, l_2^m, r_{n,m}$) di mana m dan n adalah integer. Ini akan menghasilkan puncak vote yang tinggi pada lokasi yang berkaitan dengan space parameter. Untuk menentukan distribusi reguler dari puncak yang dihasilkan, kita menggunakan logaritma dari p dan l. Parameter ini akan disimpan

pada array berdimensi 3 yaitu (log p, log l, r), yang disebut array akumulator. Setiap bin array terkait dengan pada kubus pada space (log p, log l,r) pada ukuran Δlog p x Δlog l x Δr. Nilai dari Δlog p, Δlog l dan Δr tergantung pada presisi yang diinginkan ketika mengukur parameter renormalisasi.

Persamaan 3 membuktikan bahwa sebuah renormalisasi oleh (p,l,r) memetakan sembarang wavelet maxima pada lokasi (s1,x1) ke maxima yang berlokasi pada (s2=ls1, x2=x1-r). Maka bisa dibutikan bahwa :

$$p = \frac{Wf(s_1,x_1)}{l\,Wf(s_2,x_2)} \quad (4)$$

Sembarang maxima pada tetangga (s1,x1) juga dipetakan pada maxima pada tetangga s2,x2 dengan transformasi *affine* yang sama. Diberikan (s1,x1+Δ1) sebagai lokasi dari maxima yang paling dekat dengan (s1,x1), dengan Δ1>0. Maxima ini dipetakan (s2,x2+Δ2) dengan

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{s_2}{s_1} \quad (5)$$

Untuk sembarang pasangan wavelet maxima (s1,x1) dan (s2,x2), jika maxima yang paling dekat berlokasi pada (s1,x1+Δ1) dan (s2,x2+Δ2) memenuhi persamaan 5, maka kita akan memberikan vote pada parameter renormalisasi sebagai berikut :

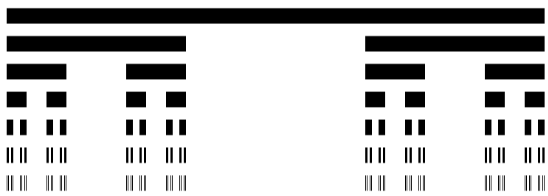
$$\log l = \log\left(\frac{s_2}{s_1}\right) \quad (6)$$

$$\log p = \log\left(\frac{W f(s_1,x_1)}{l\,W f(s_2,x_2)}\right) \quad (7)$$

$$r = x_1 - x_2\frac{s_1}{s_2} \quad (8)$$

2.4. Cantor Set

Sebuah himpunan Cantor bisa memiliki interval [*-1/2,1/2*]. Itu bisa dikonstruksi secara rekursif sebagai berikut. Interval [*-1/2,1/2*] dibagi menjadi 3 bagian yaitu : *p1* pada interval [*-1/2,-1/2+1/l1*], area nol pada interval [*-1/2+1/l1,1/2-1/l2*] dan p2 pada interval [*1/2-1/l2,1/2*]. Bagian kiri dan kanan (area p1 dan p2) akan dipecah secara rekursif dengan cara yang sama. Contoh Cantor ditunjukkan oleh Gambar 1



Gambar 1. Cantor set

Properti singularitas global dari suatu multifractal bisa dikarakteristikkan dengan spektrum singularitas *f(α)*, di mana dimensi Hausdorff dari himpunan titik-titik multifraktal memiliki singularitas dengan kekuatan *α*. Untuk sebuah Cantor, *f(α)* ada pada interval [*α1, α2*] dengan *α1=-log p1/log l1* dan *α2=-log*

p2/l2. Jika *α =α1= α2,* maka semua singularitas memiliki kekuatan yang sama dan Cantor disebut memiliki dimensi *α*.

Komposisi dari n transfomasi affine dengan parameter (p1,l1,r1) dan m transformasi affine dengan parameter (p2,l2,r2) merupakan transformasi dengan parameter ($p_1^n, l_1^n, p_2^m, l_2^m, r_{n,m}$).

III. Hasil dan Pembahasan

Kode pembangkitan Cantor pada Matlab

```
function [x,y] = cantor(n)

%default setting
if nargin ~= 1
   n = 4;
```

```
end

if n <= 0
  x = [0 1];
  y = [0 0];
else
  [x0,y0] = cantor(n-1);

  % mencari koordinat baru
  x = (1/3)*[x0 x0+2];
  y = [y0 y0];
end

plot(x,y,'.');
hold off;
```

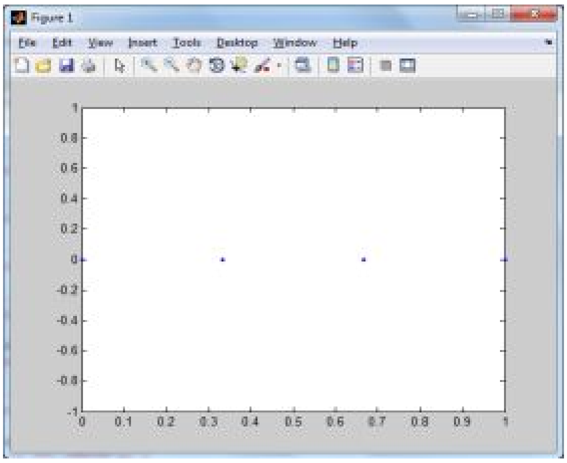
Cantor set yang dihasilkan ditunjukkan oleh Gambar 2. untuk n=1, Gambar 3. untuk n=2 dan Gambar 4. untuk n=10.

Sebuah Cantor set dengan nilai l=3, p=[0,1], r=-2 maka pada iterasi ke-1 (n=1) nilai p yang baru adalah :

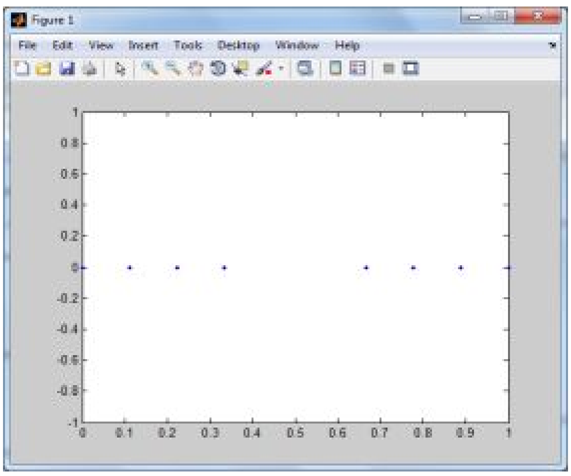
p=1/3[0,1,0+2,1+2]=[0,1/3,2/3,1]

Sedangkan pada iterasi ke-2 (n=2):

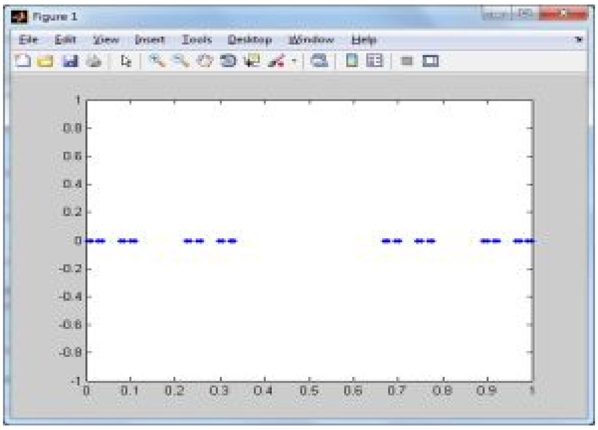
p=1/3[0,1/3,2/3,1,0+2,1/3+2,2/3+2,1+2]
=[0,1/9,2/9,1/3,2/3,7/9,8/9,1]



Gambar 2. Cantor set untuk N = 1



Gambar 3. Cantor set untuk N = 2

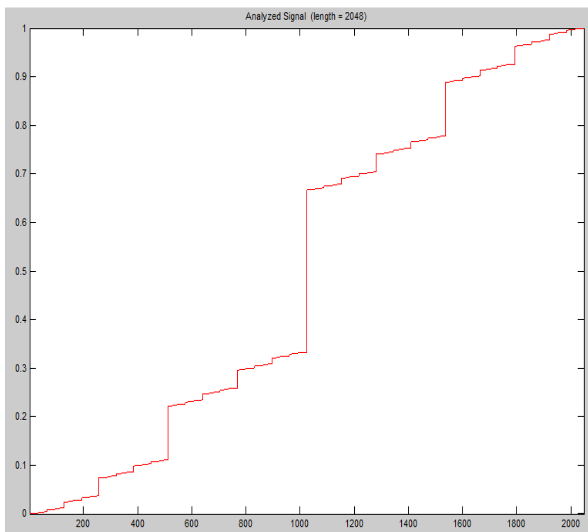


Gambar 4. Cantor set untuk N = 10

Algoritma Voting akan bekerja sebagai berikut :

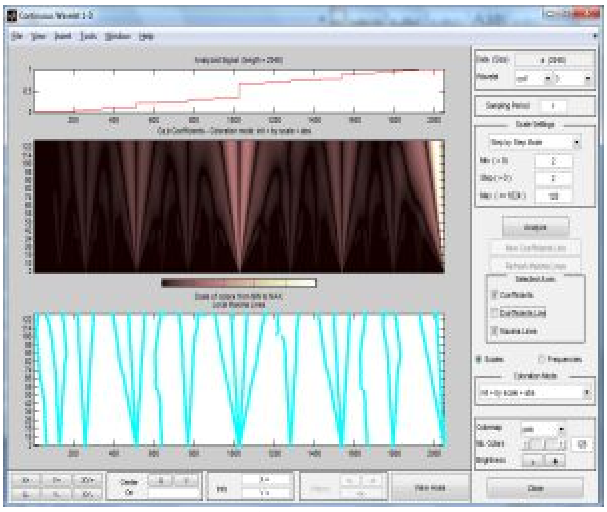
1. Setiap bin dari array space parameter pertama diberi inisial 0.
2. Untuk setiap pasangan transformasi wavelet maxima (s1,x1) dan (s2,x2) dengan s1<s2), jika maxima memenuhi persamaan 5, kita menambahkan 1 pada bin (log p, log l, r) sesuai dengan definisi pada persamaan 6, 7 dan 8. Algoritma ini menghasilkan vote yang tinggi pada bin yang berkoresponding pada parameter renormalisasi multifraktal.
3. Ketika vote sudah dilakukan, kita akan memilih indeks parameter dengan vote yang tinggi, di mana nilai vote adalah maksimum lokal bagi tetangga dimensi 3 array akumulator.
4. Jika algoritma sukses, puncak dari vote yang tertinggi memberikan parameter renormalisasi dari multifraktal.

Dengan Toolbox Wavelet dari Matlab dapat menganalisis sinyal yang dihasilkan oleh Cantor set. Gambar 5 merupakan sinyal yang dihasilkan oleh Cantor set pada n=10.



Gambar 5 Sinyal Cantor dengan n=10

Dengan Continuos Wavelet 1D, dihasilkan koefisien dan local maxima sinyal pada Gambar 5. Koefisien dan local maxima sinyal dengan menggunakan coiflet 3, nilai awal 2, step 2 dan akhir 128 ditunjukkan pada Gambar 6.



Gambar 6. Koefisien dan local maxima

IV. Kesimpulan

1. Dengan Toolbox Wavelet dari Matlab dapat menganalisis sinyal yang dihasilkan oleh Cantor set
2. Dengan Continuos Wavelet 1D, dihasilkan koefisien dan local maxima sinyal dengan menggunakan coiflet 3, nilai awal 2, step 2 dan akhir 128

Referensi :

[1] Brignoli, Delio, 2008, *DDoS Detection Based on Traffic Self-similarity*, Thesis, Master of Science in Computer Science, University of Canterbury

[2] Hwang, Wen-Liang dan Mallat, Stephane. 1993. *Characterization of Self-Similar Multifractals with Wavelet Maxima*. Courant Institute of Mathematical Sciences New York University : New York

[3] Lee Fugal, 2009. *Conceptual WaveletsIn Digital Signal Processing*. Space & Signals Technologies LLCJ

[4] Mathworld. *Affine Transformation*, alamat : http://mathworld.wolfram.com/AffineTransformation.html (Tanggal akses :3 Januari n2014)

[5] Nelson, Dylan R. *The Cantor Set- A Brief Introduction*

[6] Patel, Charan, Bhagwati dan Sinha, G.R, 2010, *Early Detection of Breast Cancer using Self Similar Fractal Method*, International Journal of Computer Applications (0975 – 8887), 10, 4, 39-43

[7] Sankar, Deepa, Thomas, Tessamma. 2009. *Breast Cancer Detection using Entropy based Fractal Modeling of Mammograms*. International Journal of Recent Trends in Engineering, 1, 3, 171-175